Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 9

Esercizio 1 Stabilire se f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 4 \\ 5x - 16 & x \geq 4 \end{cases}$$

è due volte derivabile e se è convessa.

Esercizio 2 Sia f una funzione convessa in un intervallo I.

1. Dimostrare che se ha due punti di minimo in I allora esiste un intervallo dove f è costante.
2. Dimostrare che se ha massimo in I allora è assunto agli estremi del dominio.

Esercizio 3 Sia $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e sia

$$f(x) = \sup_{a \in E} \left\{2ax - a^2\right\}.$$

1. Dimostrare che f è convessa.
2. Dimostrare che f è limitata inferiormente
3. Sia $g(x) = \sup_{a \in F} \left\{2ax - a^2\right\}$ dove $F = [-10, 10] \cap \mathbb{N}$. Dimostrare che g è convessa.

Esercizio 4 Studiare le seguenti funzioni e tracciarne il grafico:

$$f(x) = \arcsin(|e^{2x} - 1|), \qquad f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x, \qquad f(x) = x^2 \left(\log|x| - 1\right)$$

Esercizio 5 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 delle seguenti funzioni:

i. $f(x) = x - \sin x, \quad x_0 = 0,\ n = 5,$ **ii.** $f(x) = e^{x-1} - \cos(2\pi x), \quad x_0 = 1,\ n = 4,$

iii. $f(x) = x \arctan x, \quad x_0 = 0,\ n = 2,$ **iv.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2,\ n = 2,$

v. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,\ n = 3,$ **vi.** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 2,\ n = 3$

vii. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1,\ n = 3,$ **viii.** $f(x) = x^4 + x - 2, \quad x_0 = 1,\ n = 4$

Esercizio 6 Si calcolino i seguenti limiti usando la formula di Taylor con resto di Peano

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right), \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3 \left\{\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x - \log(\cos x))\log(1+\sin x)}{x \sin x \sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\arctan x - x\sin x}{\arctan x - 1 - \log(1+x) + \cos x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \log(1+x^5)}{\left(\sqrt{1+x^4} - 1\right)^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \cos(x^2)}{x^2 \sin x - x\tan(x^2)}$$

Esercizio 7 Utilizzando il polinomio di Taylor con resto di Lagrange di grado opportuno, si dia una somma di razionali che approssima $\sqrt{e}$ a meno di un errore inferiore a 10^{-3}. Si dica se si tratta di una approssimazione per eccesso o per difetto.

Esercizio 8 Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di minimo locale. Allora:

1. Se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, allora $f'''(x_0) = 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x-x_0)+a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0$, allora $a \leq 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Il polinomio di Taylor di grado 13 associato a f e centrato in x_0 ha un minimo globale in x_0. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $f^{(13)}(x_0) = 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 9 Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e $f^{(2n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

1. Se $f^{(5)}(0) \neq 0$, allora $\exists\, \varepsilon > 0 :\ f(\varepsilon)f(-\varepsilon) < 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $f'(0) = 1$, allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se anche $f^{(2n+1)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora esiste un intorno di 0 in cui f è nulla. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Posto $g(x) := (f(x))^2$, si ha che $g^{(2n+1)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$